

# FACE-SHEAR VIBRATION OF AT-CUT QUARTZ PLATE

Qiaoqiao PAN<sup>1</sup>, Ji WANG<sup>2</sup>, Lijun YANG<sup>2</sup>, Min-Chiang CHAO<sup>1</sup>

<sup>1</sup>TXC (Ningbo) Corporation, 189 Huangshan West Rd, Beilun District, Ningbo, Zhejiang 315800, China

<sup>2</sup>Piezoelectric Device Lab, School of Mech Eng & Mechanics, Ningbo University, 818 Fenghua Rd, Ningbo, Zhejiang 315211, China

E-mail: {nqiaoqiaopan, chaomk}@txc.com.tw wangji@nbu.edu.cn

Based on Mindlin plate theory, the frequency spectrum of face shear mode in AT-cut quartz plates and its frequency temperature behavior are studied. The results of numerical simulation are compared with experiment data. Both exact three-dimensional plate equations and Mindlin first-order plate equations are used to calculate the spectrum respectively, which can help engineers to decide suitable dimensions of AT-cut quartz plate to avoid the couple of thickness-shear and face-shear. The temperature behavior characteristic is quite an important characteristic of quartz resonator. In the present paper, the frequency temperature behavior of face-shear mode is also studied. Linking the frequency spectrum and temperature behavior results can enable engineers not only to get suitable dimensions of AT-cut quartz plate at room temperature but also to get suitable dimensions at certain temperature range. The measurement data for rectangular, AT-cut quartz plates is also demonstrated.

**Keywords:** face-shear, first-order plate equation, frequency temperature behavior

## AT 切割石英晶体板面剪切振动模态特性研究

潘俏俏<sup>1</sup> 王骥<sup>2</sup> 阳丽君<sup>2</sup> 赵岷江<sup>1</sup>

<sup>1</sup>315800 浙江省宁波市北仑区黄山西路 189 号台晶(宁波)电子有限公司

<sup>2</sup>315211 浙江省宁波市江北区风华路 818 号宁波大学机械工程与力学学院压电器件技术实验室  
电子邮件: {nqiaoqiaopan, chaomk}@txc.com.tw wangji@nbu.edu.cn

基于 Mindlin 板的理论, 得到 AT 切割石英晶体板面剪切振动的频谱图, 以及面剪切振动的频率温度特性结果, 并且与实际样品的量测值进行比对。本文分别以三维精确理论和一阶板的理论对 AT 切割石英晶体板 Z 轴方向面剪切振动进行理论推导, 计算出的频谱图可帮助晶片设计人员选择合适的晶片尺寸来避开厚度剪切振荡和面剪切振荡的耦合。温度特性对石英晶体谐振器来说至关重要, 本文通过理论推导得出了 Z 轴方向的面剪切振动的频率温度特性结果, 这部份的结果结合频谱图可以帮助晶片设计人员找到在一定的温度范围内都无耦合情况出现的晶片尺寸。实际的样品量测的结果也被附加于论文中, 用于和理论计算结果比较。

**关键词:** 面剪切, 一阶板的理论, 频率温度特性

### 1. 引言

AT 切割石英晶体板因为其良好的频率温度特性被广泛地应用于压电谐振器的制作中。它所利用的振动形态是位移与  $X_1$  (diagonal axis) 方向平行的厚度剪切振动模态。然而石英晶体是各向异性的材料, 晶体板的振动除了厚度剪切振动模态以外还存在很多不被需要的寄生模态。在实际的石英晶体谐振器的设计中, 如何选择好合适的石英晶体板的尺寸来避开寄生模态和厚度剪切振动模态的耦合, 是设计人员最关心的问题。面剪切振荡是最早期被发现的寄生

模态之一, 关于它的理论推导早在 70 年代就已经由 Mindlin 提出。[1]Mindlin 对面剪切振动模态的推导是基于三维理论的基础上进行的, 为了能用较为简单的表达式来表达出解的形式, 板的模型进行了简化, 并且为符合自由边界条件, 还假设板的横截面不再是矩形, 而是存在一定倾斜角(Mindlin Angle)的平行四边形。在这篇论文中, 我们对 Mindlin 的推导过程进行了说明, 同时我们利用一阶板的理论也对面剪切振动进行了推导, 而模型的假设不需要有 Mindlin Angle。然后, 利用三维理论和一阶板理论的推导结果分别计算出了频谱图。设计人员可根据

它选择到避开两模态耦合的晶体板  $x_3$  方向尺寸。另外对根据两种理论计算出的频谱图的比较, 也说明了两种理论间的异同点。

石英晶体谐振器正在被广泛地应用于各个领域。对于产品特性的要求也逐步提高, 特别是产品的温度特性, 越来越被客户所重视。目前石英晶体的产品设计不但要排除常温下寄生模态和厚度剪切振荡的耦合, 还要考虑产品被应用的温度范围的情况。本文在一阶板理论推导的基础上, 考虑热膨胀系数和热弹性系数, 计算了面剪切振荡的频率温度特性结果, 通过这个计算可让设计人员掌握面剪切振荡形态随温度的变化形态, 方便在设计时在常温下避开模态耦合的同时也能预估产品在应用的温度区间模态的耦合情况。

实际产品量测结果也包含与此论文中, 以便对理论计算和实际量测结果的差异进行比较。

## 2. 基于三维理论的面剪切振动方程

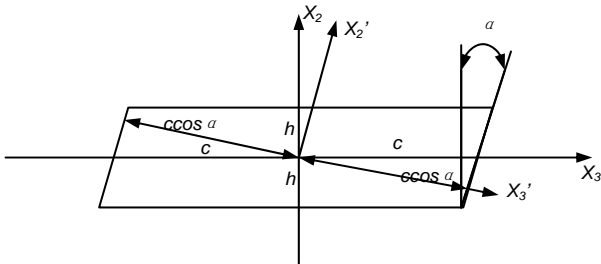


图 1. 石英晶体板的截面图  
Figure 1. Cross-section of quartz strip

Y-cut 石英晶体板的应力应变方程:

$$\begin{aligned} T_1 &= c_{11}S_1 + c_{12}S_2 + c_{13}S_3 + c_{14}S_4, \\ T_2 &= c_{21}S_1 + c_{22}S_2 + c_{23}S_3 + c_{24}S_4, \\ T_3 &= c_{31}S_1 + c_{32}S_2 + c_{33}S_3 + c_{34}S_4, \\ T_4 &= c_{41}S_1 + c_{42}S_2 + c_{43}S_3 + c_{44}S_4, \\ T_5 &= c_{55}S_5 + c_{56}S_6, \\ T_6 &= c_{65}S_5 + c_{66}S_6, \end{aligned} \quad (1)$$

$c_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ),  $S_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ),  $T_p$  ( $p = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ )

分别表示弹性常数, 应变和应力。

位移应变方程:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \\ S_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \\ S_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \\ S_5 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \\ S_6 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (2)$$

运动方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_6}{\partial x_2} + \frac{\partial T_5}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial T_6}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + \frac{\partial T_4}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial T_5}{\partial x_1} + \frac{\partial T_4}{\partial x_2} + \frac{\partial T_3}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

把理论模型定义为是沿  $x_2$   $x_3$  方向有有限尺寸, 沿  $x_1$  方向是无限延伸的石英晶体板, 并且各个面都是自由的, 所以将位移假设成如下形式:

$$u_1 = U(x_2, x_3)e^{i\omega t}, u_2 = u_3 = 0. \quad (4)$$

将(4)式代入(1)-(3)式, 应力方程, 应变方程和运动方程简化如下:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2 = T_3 = T_4 = 0, \\ T_5 &= c_{55} \frac{\partial U}{\partial x_3} + c_{56} \frac{\partial U}{\partial x_2}, \\ T_6 &= c_{65} \frac{\partial U}{\partial x_3} + c_{66} \frac{\partial U}{\partial x_2}, \\ S_1 &= S_2 = S_3 = S_4 = 0, \\ S_5 &= \frac{\partial U}{\partial x_3}, S_6 = \frac{\partial U}{\partial x_2}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$c_{66} \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + 2c_{56} \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_3} + c_{55} \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} = -\rho \omega^2 U. \quad (7)$$

以上式子中省略掉了位移的指数项。

进一步将位移假设成如下形式:

$$\begin{aligned} U &= A \sin \eta x_2 \cos \zeta \left( \frac{c_{56}}{c_{66}} x_2 - x_3 \right) \\ &+ B \sin \eta x_2 \sin \zeta \left( \frac{c_{56}}{c_{66}} x_2 - x_3 \right) \\ &+ C \cos \eta x_2 \cos \zeta \left( \frac{c_{56}}{c_{66}} x_2 - x_3 \right) \\ &+ D \cos \eta x_2 \sin \zeta \left( \frac{c_{56}}{c_{66}} x_2 - x_3 \right). \end{aligned} \quad (8)$$

将(8)式代入(7)式可得到频率与波数的关系式:

$$\begin{aligned} \rho \omega^2 &= c_{66} \eta^2 + \gamma_{55} \zeta^2, \\ \gamma_{55} &= c_{55} - c_{56}^2 / c_{66}. \end{aligned} \quad (9)$$

根据边界条件，上下两面的应力为零，得到当  $x_2 = \pm h$  时：

$$T_2 = 0, T_4 = 0, T_5 = 0; \quad (10)$$

当

$$2\eta h = m\pi \quad (11)$$

能满足(10)式的边界条件。

假设横截面为矩形，板侧面的边界条件是当  $x_3 = \pm c$  时：

$$T_3 = 0, T_4 = 0, T_5 = 0. \quad (12)$$

前两个条件本来就是满足的，但如果要满足第三式，就需要一个复杂的有无限阶次的公式才能满足，这是不实用的。

为解决侧面的边界条件问题，我们将板的横截面做处理，使侧边做  $\alpha$  角的倾斜，并且将坐标系进行旋转，得到新的坐标系。

这样边界条件就成了，当  $x_3' = \pm c \cos \alpha$  时：

$$T_3' = 0, T_4' = 0, T_5' = 0, \quad (13)$$

$$\alpha = \arctan(c_{56} / c_{66}). \quad (14)$$

$\alpha$  角也被叫做 Mindlin Angle.

将边界条件代入运动方程得到，当

$$2\zeta c = n\pi, \quad (15)$$

时，边界条件成立。

把(11)和(15)式代入第(8)式和第(19)式得到最终的位移方程：

$$\begin{aligned} U = & A \sin\left(\frac{m\pi}{2h} x_2\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2c} \left(\frac{c_{56}}{c_{66}} x_2 - x_3\right)\right) \\ & + B \sin\left(\frac{m\pi}{2h} x_2\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2c} \left(\frac{c_{56}}{c_{66}} x_2 - x_3\right)\right) \\ & + C \cos\left(\frac{m\pi}{2h} x_2\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2c} \left(\frac{c_{56}}{c_{66}} x_2 - x_3\right)\right) \\ & + D \cos\left(\frac{m\pi}{2h} x_2\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2c} \left(\frac{c_{56}}{c_{66}} x_2 - x_3\right)\right), \end{aligned} \quad (16)$$

其中：

$$\begin{aligned} A : & m \text{ odd}, n \text{ even} \\ B : & m \text{ odd}, n \text{ odd} \\ C : & m \text{ even}, n \text{ even} \\ D : & m \text{ even}, n \text{ odd}, \end{aligned} \quad (17)$$

和频率方程：

$$\omega = \frac{m\pi}{2h} \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}} \sqrt{1 + \frac{\gamma_{55} n^2 h^2}{c_{66} m^2 c^2}}. \quad (18)$$

当  $m = 0, n$  为奇数时为面剪切振动的位移方程和频率方程，分别为：

$$U = \sin\left(\frac{n\pi}{2c} \left(\frac{c_{56}}{c_{66}} x_2 - x_3\right)\right), \quad (19)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma_{55}}{\rho}} \frac{n\pi}{2c}. \quad (20)$$

### 3. 基于一阶板理论的面剪切振动方程

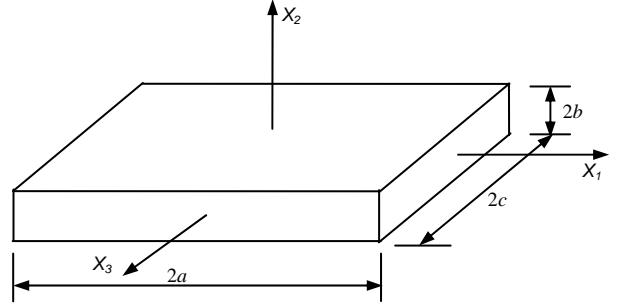


图 2. 典型石英晶体板的模型  
Figure 2. A typical plate model of crystal resonators

二维理论中的运动方程：

$$T_{ij,i}^{(n)} - nT_{2j}^{(n-1)} + F_j^{(n)} = \rho \sum_m B_{mn} \ddot{u}_j^{(m)}, \quad (21)$$

其中：

$$F_j^{(n)} = b^n T_{2j}(b) - (-b)^n T_{2j}(-b), \quad (22)$$

$$B_{mn} = \begin{cases} \frac{2b^{m+n+1}}{m+n+1}, & m+n \text{ 为偶数} \\ 0, & m+n \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (23)$$

$T_{ij}^{(n)}$  为  $n$  阶应力分量。

应力和位移关系：

$$\begin{aligned} T_p^{(n)} = & \sum_{m=0} B_{mn} \kappa_p^{(m)} \{ c_{p1} u_{1,1}^{(m)} + c_{p2} \kappa_2^{(m)} (m+1) u_2^{(m+1)} \\ & + c_{p4} \kappa_4^{(m)} (m+1) u_3^{(m+1)} + c_{p5} u_{3,1}^{(m)} + c_{p6} \kappa_6^{(m)} [u_{2,1}^{(m)} + (m+1) u_1^{(m+1)}] \}, \end{aligned} \quad (24)$$

$\kappa_p^{(m)}$  为  $m$  阶修正系数。

只考虑厚度剪切振动模态和面剪切振动模态，将位移形式假设如下：

$$u_1^{(0)} = A_1 \sin \zeta x_3 e^{i\omega t}, \quad u_1^{(1)} = \frac{A_2}{b} \cos \zeta x_3 e^{i\omega t}, \quad (25)$$

$$u_2^{(0)} = u_3^{(0)} = u_3^{(1)} = 0.$$

得到一阶的运动方程：

$$\frac{\partial T_5^{(0)}}{\partial x_3} + F_1^{(0)} = 2b\rho\ddot{u}_1^{(0)}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial T_5^{(1)}}{\partial x_3} - T_6^{(0)} + F_1^{(1)} = \frac{2}{3}b^3\rho\ddot{u}_1^{(1)},$$

一阶应力与位移关系式:

$$T_5^{(0)} = 2b(c_{55}u_{1,3}^{(0)} + c_{56}\kappa_6^{(0)}u_1^{(1)}),$$

$$T_5^{(1)} = \frac{2b^3}{3}c_{55}u_{1,3}^{(1)}, \quad (27)$$

$$T_6^{(0)} = 2b\kappa_6^{(0)}(c_{65}u_{1,3}^{(0)} + c_{66}\kappa_6^{(0)}u_1^{(1)}).$$

将位移形式代入运动方程得到振幅  $A_1, A_2$  之比, 从而将位移形式进一步写成如下式:

$$u_1^{(0)} = \sum_{r=1}^2 \alpha_{1r} A_{2r} \sin\left(\frac{Y_r \pi x_3}{2b}\right), \quad (28)$$

$$u_1^{(1)} = \frac{1}{b} \sum_{r=1}^2 A_{2r} \cos\left(\frac{Y_r \pi x_3}{2b}\right),$$

其中,

$$Y_r = \frac{\zeta_r}{\pi}, \alpha_{1r} = \frac{A_{1r}}{A_{2r}}, r = 1, 2. \quad (29)$$

因为板的侧边是自由的, 故可得到如下的边界条件:

$$T_5^{(0)} = T_5^{(1)} = 0, \quad x_3 = \pm c. \quad (30)$$

将位移表达式代入边界条件, 即可得到代表矩形板  $x_3$  方向尺寸与频率关系的频谱图。

#### 4. 面剪切振动模态的频率温度特性

关于面剪切振动模态频率温度特性的推导是在一阶板的面剪切振动方程的基础上进行的。将热膨胀系数和热弹性系数考虑在内, 可将一阶板的面剪切振动运动方程 (26) 变更为:

$$\beta_1 T_{5,3}^{(0)} = 2b\rho\ddot{u}_1^{(0)}, \quad (31)$$

$$\beta_1 T_{5,3}^{(1)} - \beta_1 T_6^{(0)} = \frac{2}{3}b^3\rho\ddot{u}_1^{(1)}$$

其中  $\beta_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$  为热弹性系数,

$$\beta_i = \delta_i + \alpha_i^\theta, \quad \alpha_i^\theta = \alpha_i^{(1)}\Theta + \alpha_i^{(2)}\Theta^2 + \alpha_i^{(3)}\Theta^3, \quad (32)$$

$$\Theta = T - 25^\circ\text{C}.$$

应力位移与温度的关系为:

$$T_5^{(0)} = 2b[D_{55}\beta_1 u_{1,3}^{(0)} + k_6^{(0)}D_{56}\beta_1 u_1^{(1)}],$$

$$T_5^{(1)} = \frac{2}{3}b^3[D_{56}\beta_1 u_{1,3}^{(1)}], \quad (33)$$

$$T_6^{(0)} = 2bk_6^{(0)}[D_{65}\beta_1 u_{1,3}^{(0)} + k_6^{(0)}D_{66}\beta_1 u_1^{(1)}]$$

其中  $D_{ij} (i = j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$  为热膨胀系数,

$$D_{ij} = c_{ij} + d_{ij}^{(1)}\Theta + d_{ij}^{(2)}\Theta^2 + d_{ij}^{(3)}\Theta^3, \quad \Theta = T - 25^\circ\text{C}. \quad (34)$$

#### 5. 算例与实际量测结果

图 3 为利用三维理论和一阶板理论的推导结果计算得到了频谱图, 设计人员可以据此选择在  $x_3$  方向没有面剪切振动模态和厚度剪切振动模态耦合的晶片尺寸。另外比较两种理论的计算结果发现, 计算结果基本是一致的。

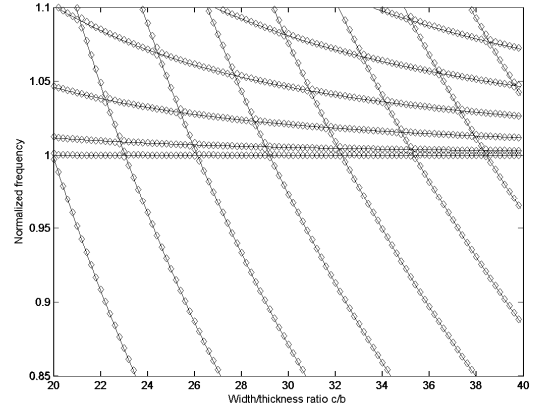


图 3. 宽度与厚度之比与归一化频率的关系图。—代表三维理论计算结果,  $\diamond\diamond\diamond$ 代表一阶板理论计算的结果。  
Figure 3. Frequency versus width/thickness ratio of face shear and thickness twist mode. — represents results calculated by three-dimensional plate equations and  $\diamond\diamond\diamond$  represents results calculated by Mindlin first-order plate equations.

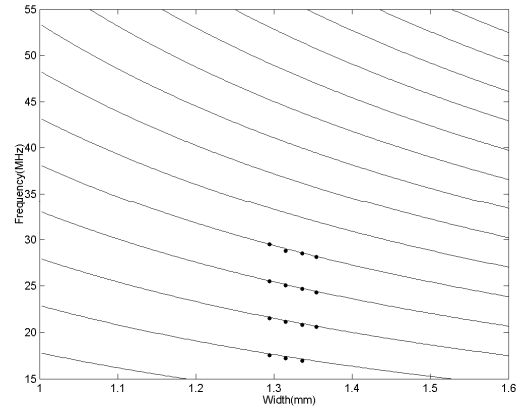


图 4. 面剪切振动模态频率与宽度尺寸的关系图和实际实验结果。线代表理论计算结果, 点代表实际量测结果。

Figure 4. Frequency of face shear mode versus width and measured results. Line represents calculated results and points represents measured results.

面剪切振动模态频率谱图计算结果的可信度也用实际的实验结果进行了验证。我们选择的是基频为 41.280MHz 的石英晶体矩形板, 板的  $x_1$  方向尺寸为

固定为 2.000mm, 板的  $x_3$  方向尺寸分别选择 1.295, 1.315, 1.335, 1.355mm 进行实验。实际测量的结果如图 4 中的黑点所示。从图 4 中的理论计算结果和实际实验结果的比对表明两者很接近, 证明理论的计算是可信的, 是实际可以拿来用的。

分别以三维理论和一阶板的理论为基础而计算得到的面剪切振动的频率温度特性图如图 5 所示。验证实验选择了基频为 41.280MHz,  $x_1, x_3$  方向尺寸分别为 2.000mm, 1.335mm 晶片的第 15 阶的面剪切振动模态的温度特性进行了测量。图 5 表示出了三者的差异。

从趋势上看, 三者基本上是一致的, 但实际测量的变化幅度要大于理论计算的结果。设计人员仍可根据大致的计算结果来估算面剪切振动模态随温度变化的频率变化趋势。

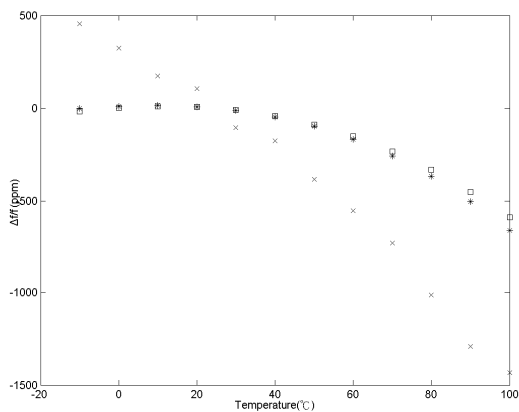


图 5. 面剪切振动模态的频率温度关系图。×××代表实际量测结果, \* \* \*代表三维理论计算结果, □□□代表一阶板理论计算结果。

Figure 5. Frequency-temperature relation of face shear mode. ××× represents measured results, \* \* \* represents results calculated by three-dimensional plate equations and □□□ represents results calculated by Mindlin first-order plate equations.

## 6. 結論

本论文分别采用三维理论和一阶板的理论对面剪切振动模态进行了理论推导, 并且从算例中得到, 利用两种推导方式得到的关于面剪切振动的频谱图十分接近。将实际的量测得到的面剪切振动模态的数据和算例进行比较, 发现两者的吻合度很高, 更加证明了理论的准确性。在一阶板理论的基础上, 考虑热膨胀系数和热弹性系数, 推导出了面剪切振荡模态频率和温度之间的关系。将实际的结果和算例做比较, 发现趋势虽然一致, 但数值上差异较大, 是后续我们的工作需要补充的地方。

## 参考文献

1. R. D. Mindlin, Thickness-twist vibrations of a quartz strip, *Intl. J. Solids Struct.*, vol. 7, pp. 1-4(1971).[doi:10.1016/0020-7683(71)90013-8]
2. J. Wang and L. J. Shen, Exact thickness-shear resonance frequency of electroded piezoelectric crystal plates, *J. Zhejiang University Science*, **6A**(9), 980-985, 2005.
3. J. Wang and W. Zhao, The Determination of the optimal length of crystal blanks in quartz crystal resonators, *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, **52**(11), 2023-2030, 2005.
4. R. D. Mindlin, Bechmann's number for harmonic overtones of thickness/twist vibrations of rotated-Y-cut quartz plates, *J. Acoust. Soc. Am.*, **41**, 969-973, 1967.
5. P. C. Y. Lee and J. Wang, Frequency-temperature relations of thickness-shear and flexural vibrations of contoured quartz resonators, *J. Appl. Phys.*, **80**(6), 3457-3465, 1996.
6. P. C. Y. Lee and Y.-K. Yong, Frequency-temperature behavior of thickness vibrations of doubly rotated quartz plates affected by plate dimensions and orientations, *J. Appl. Phys.*, **60**(7), 2327-2342, 1986.
7. J. Wang, Q. Q. Pan, L. J. Yang, and M.-C. Chao, Design of quartz crystal resonators with an analytical procedure based on the Mindlin plate theory, *Proceedings of the 2010 IEEE International Ultrasonics Symposium*, October 11-14, San Diego, California, USA.
8. R. D. Mindlin (edited by J. S. Yang), *An Introduction to the Mathematical Theory for the Vibrations of Elastic Plates*, World Scientific, New Jersey, 2007.
9. J. Wang, M.-C. Chao, L. J. Yang, Q. Q. Pan, Y. M. Chen, and J. K. Du, An integrated analysis of vibration of quartz crystal plates with the Mindlin plate theory for resonator design and optimization, *Proceedings of the First Joint China-Japan International Workshop on Acoustic Wave Device*, November 4-5, 2010.