

# AN INTEGRATED PROGRAM OF VIBRATIONS OF QUARTZ CRYSTAL PLATES WITH MINDLIN PLATE THEORY FOR RESONATOR DESIGN

Ji WANG<sup>1</sup>, Yu-mei CHEN<sup>1</sup>, Li-jun YANG<sup>1</sup>, Qiao-qiao PAN<sup>2</sup>, Min-Chiang CHAO<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Piezoelectric Device Laboratory, School of Mechanical Engineering and Mechanics, Ningbo University, 818 Fenghua Road, Ningbo, Zhejiang 315211, China*

<sup>2</sup>*TXC (Ningbo) Corporation, 189 West Huangshan Road, Beilun District, Ningbo, Zhejiang 315800, China*  
E-mail: wangji@nbu.edu.cn

The theory and method have been extensively studied for the design of quartz crystal resonators, and Mindlin plate theory is widely used. As most research were aimed to solve specific problems of vibrations, there is no application program for the design. An integrated program based on Mindlin plate theory for the AT-cut quartz crystal resonators have been developed in our study, because AT-cut quartz crystal is the most popular cut for resonators. The functions include how to determine the optimal size of crystal plate and the configuration of electrode according to known relations. Then we are going to add to the program on how to calculate the electrical parameters of quartz crystal resonators with the consideration of dissipation. In the program, we can obtain dispersion relation, frequency spectra, frequency-temperature relation and so on, which can provide essential references for the design. All the analyses can provide the device performance parameters such as mode, frequency, frequency-temperature relation, which are useful to evaluate the effect of different parameters and optimal design. Consequently, we can avoid time-consuming trial and error steps in the process of design and establish the foundation for computational simulation and optimization.

Keywords: resonator, Mindlin, plate, quartz, crystal, software

## 基于 Mindlin 板理论的用于谐振器设计的石英晶体板振动分析程序

王骥<sup>1</sup> 陈玉梅<sup>1</sup> 阳丽君<sup>1</sup> 潘俏俏<sup>2</sup> 赵岷江<sup>2</sup>

<sup>1</sup>315211 浙江省宁波市江北区风华路 818 号宁波大学机械工程与力学学院压电器件技术实验室

<sup>2</sup>315800 浙江省宁波市北仑区黄山西路 189 号台晶(宁波)电子有限公司

关于石英晶体谐振器设计的理论和方法已经得到了广泛的研究,其中应用最广的是 Mindlin 板理论。大量的研究都是针对具体问题进行的,但是目前还没有一个专门针对石英晶体谐振器设计的完整程序。本文介绍了基于 Mindlin 板理论的 AT 切石英晶体谐振器设计的一个程序,因为 AT 切是实际生产中使用最多的一种晶体切型。该程序包括根据已知的频率、电极厚度等参数来推算出石英晶体板的厚度、最佳的电极长度、最优的石英晶体板尺寸等,并将考虑把计算电路参数的程序也加进去。利用这一程序,我们还可以计算出色散关系图、频率谱图、温频曲线等,为石英晶体谐振器的设计提供参考和建议。这些分析计算可以给出主要的器件指标如模态、频率、温频关系等的影响,从而有利于设计参数的初步估计和最佳选择,减少设计中的盲目性和试验时间,为基于计算分析的设计流程奠定基础。

关键词: 谐振器, Mindlin, 板, 石英, 晶体, 软件

### 1. 引言

随着现代电子技术的发展,手机、汽车电子等产品功能的不断增加,所用的石英晶体元器件数目亦成倍增长。石英晶体谐振器作为频率控制器件具有高精密、高稳定性和高一致性等重要特点,自 20 世纪

20 年代诞生以来,得到了广泛的应用和研究。但是众多研究都着手于解决一些振动分析的具体问题,目前没有一个专门针对石英晶体谐振器设计的完整程序。AT 切石英晶片,由于具有非常好的温度频率特性和体积小等特点成为了实际生产中使用最多的一种晶体切型,它的工作模态为厚度剪切振动,用来制作高频和超高频的谐振器。大量的研究表

明, 运用 Mindlin 板理论来精确分析和设计石英晶体谐振器是一种有效方法。本文的程序正是基于 Mindlin 一阶板理论来编写, 程序主要针对 AT 切石英晶体谐振器分析和设计。主要功能包括: 考虑电极效应的情况下石英晶体板最佳厚度、长度尺寸的计算程序[1,2]; 根据 Bechmann 数来计算最佳电极长度尺寸的程序[3]; 考虑  $u_2^{(0)}, u_3^{(0)}, u_1^{(1)}$  耦合振动时的色散关系程序; 考虑  $u_2^{(0)}, u_3^{(0)}, u_1^{(1)}$  耦合振动时的频率谱图程序;  $u_2^{(0)}, u_3^{(0)}, u_1^{(1)}$  耦合振动在不同温度影响下的频率谱程序以及不同长厚比下的频率温度曲线。通过 MATLAB GUI(图形用户接口工具)来创建的图形用户界面是用户与计算机之间交流的工具, 为了方便用户与计算机之间的交流, 本文还建立了基于 MTALAB GUI 的石英晶体谐振器设计程序用户界面。

## 2. 理论依据

### 2.1. 基本尺寸的计算

石英晶体板基本尺寸的确定是进行石英晶体谐振器设计的第一步, Wang 和 Shen 推导了考虑电极效应和压电效应 AT 切石英晶体板厚度的计算公式[1]。本文中计算石英晶体板厚度的程序正是基于考虑电极效应的理论公式来编写, 其公式为:

$$\tan\left(\frac{\pi b}{2 b_0}\right) \tan\left(\pi \frac{\bar{b}}{b_0}\right) = \frac{k}{C_{66}}. \quad (1)$$

其中,

$$k = \frac{\eta}{\bar{\eta}}, C_{66} = \frac{\bar{c}_{66}}{c_{66}}. \quad (2)$$

这里  $b$  为石英晶体板的半厚度, 即需要我们计算的未知量,  $\bar{b}$  为给定的电极覆盖层半厚度,  $\eta$  为石英晶体板中传播的波数,  $\bar{\eta}$  为电极层中传播的波数,  $\bar{c}_{66}$  为电极材料弹性常数,  $c_{66}$  为石英晶体板弹性常数,  $f$  为给定的石英晶体谐振器频率。当其振动模态为纯厚度剪切振动模态时, 设石英晶体板半厚度为  $b_0$ , 电极覆盖层半厚度为  $\bar{b}_0$ , 则有:

$$b_0 = \frac{1}{4f} \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}}, \bar{b}_0 = \frac{1}{4f} \sqrt{\frac{\bar{c}_{66}}{\rho}}. \quad (3)$$

石英晶体板另外一个重要的尺寸就是它的长度, 一般依据石英晶体谐振器的封装尺寸要求等来确定石英晶体板的最大长度尺寸, 然后根据最佳长厚比应该处在一个寄生模态与工作模态(厚度剪切振动模态)耦合最弱的点, 计算公式是[2]:

$$a = b(n + 0.5)\Delta, n = 0, 1, 2, 3, \dots, N. \quad (4)$$

对于 AT 切石英晶体厚度剪切振动与弯曲振动耦合时有:  $\Delta=1.6056$ 。关于谐振器电极的最佳长度, 我们根据 Mindlin 的方法[3], 推导出 AT 切石英晶体厚度剪切振动的 Bechmann 数来确定其最佳电极长度。假设电极长度为  $L$ , Bechmann 数为  $B$ , 则有:

$$L = B \times 2b, B = \left(\frac{2c_{11}}{c_{66}R}\right)^{1/2} \frac{1}{m}, R = \frac{2\rho\bar{b}}{\rho b}. \quad (5)$$

### 2.2. 色散关系和频谱关系的计算

准确的色散关系是验证方程能否用于板的高频振动分析的基础, 因此, 首先运用 Mindlin 一阶板方程来画出考虑厚度剪切振动、弯曲振动和面剪切振动耦合时的色散关系曲线。

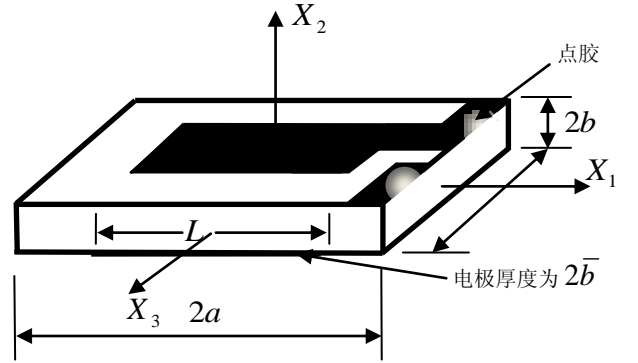


图 1. 典型的石英晶体谐振器模型。

Fig 1. A typical plate model of crystal resonators.

相关的一阶板方程为:

$$\begin{aligned} T_5^{(0)} &= 2b\kappa_3 [c_{33}u_{3,1}^{(0)} + c_{36}\kappa_6 (u_{2,1}^{(0)} + u_1^{(1)})], \\ T_6^{(0)} &= 2b\kappa_6 [c_{65}u_{3,1}^{(0)} + c_{66}\kappa_6 (u_{2,1}^{(0)} + u_1^{(1)})], \\ T_1^{(1)} &= \frac{2b^3}{3} \kappa_1 c_{11} u_{1,1}^{(1)}, \\ T_{6,1}^{(0)} &= 2b\rho\ddot{u}_2^{(0)}, \\ T_{5,1}^{(0)} &= 2b\rho\ddot{u}_3^{(0)}, \\ T_{1,1}^{(1)} - T_6^{(0)} &= \frac{2b^3}{3} \rho\ddot{u}_1^{(1)}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

将位移假设为直行波形式:

$$\begin{aligned} u_2^{(0)} &= A_1 \sin \xi x_1 e^{i\omega t}, \\ u_1^{(1)} &= \frac{A_2}{b} \cos \xi x_1 e^{i\omega t}, \\ u_3^{(0)} &= A_3 \sin \xi x_1 e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $A_i (i=1,2,3), \xi, \omega, t$  分别为振幅, 波数, 频率和时间。

相应的应力边界条件为:

$$T_5^{(0)} = T_6^{(0)} = T_1^{(1)} = 0 \quad x_1 = \pm a. \quad (8)$$

将位移假设(7)代入运动方程可得到归一化频率与波数的关系即色散关系曲线(见图 2)。我们进一步将振幅比假设为如下形式:

$$\alpha_{1i} = \frac{A_{4i}}{A_{2i}}, \alpha_{2i} = \frac{A_{3i}}{A_{2i}}, i = 1, 2, 3. \quad (9)$$

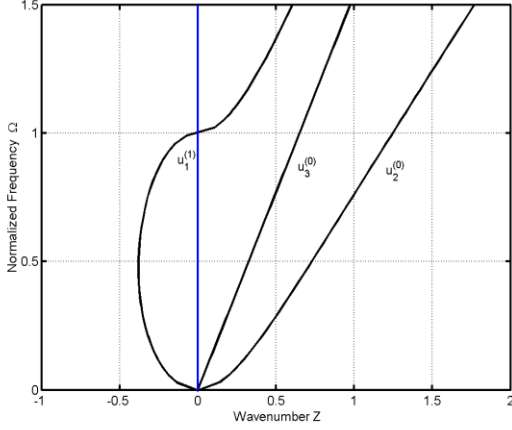


图 2. Mindlin 一阶板方程所得 AT 切石英晶体色散关系。  
Fig 2. Dispersion relation of an AT-cut quartz plate by the Mindlin first-order equations.

结合应力边界条件(8), 可以得到归一化频率与长厚比之间的关系即频率谱图(见图 3)。

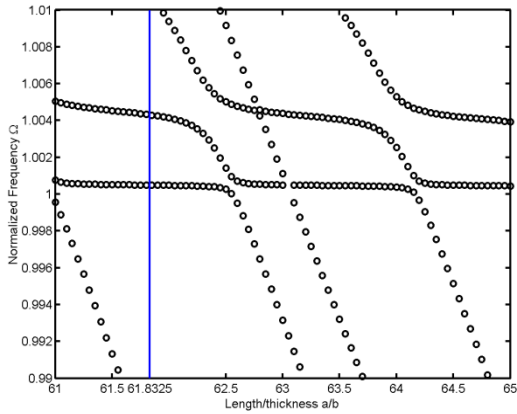


图 3. Mindlin 一阶板方程所得 AT 切石英晶体频率谱图。  
Fig 3. Frequency spectrum of an AT-cut quartz plate by the Mindlin first-order equations.

### 2.3. 考虑温度效应的频谱关系和频温关系

考虑温度效应时,  $n$  阶应力表示的运动方程为[4]:

$$\beta_{ik} t_{kj}^{(n)} - n \beta_{ik} t_{k2}^{(n-1)} + \beta_{ik} F_k^{(n)} = \rho \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} i_i^{(m)}. \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} t_{kj}^{(n)} &= \int_{-b}^b x_2^n t_{kj} dx_2, \\ F_k^{(n)} &= b^n t_{k2}(b) - (-b)^n t_{k2}(-b), \\ \Theta &= T - T_0, T_0 = 25^\circ C, \\ \beta_{ik} &= \delta_{ik} + \alpha_{ik}^\theta, \alpha_{ik}^\theta = \alpha_{ik}^{(1)} \Theta + \alpha_{ik}^{(2)} \Theta^2 + \alpha_{ik}^{(3)} \Theta^3, \\ \delta_{ik} &= \begin{cases} 1, i = k, \\ 0, i \neq k. \end{cases}, A_{mn} = \begin{cases} \frac{2b^{m+n+1}}{m+n+1}, \text{当 } m+n \text{ 为偶数,} \\ 0, \text{当 } m+n \text{ 为奇数.} \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

这里的  $t_{kj}^{(n)}$  是  $n$  阶的应力,  $F_k^{(n)}$  为  $n$  阶的面力,  $\alpha_{ik}^\theta$  为热膨胀系数,  $\beta_{ik}$  为线性热膨胀系数。考虑温度效应时,  $n$  阶应变位移关系为:

$$e_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2} [\beta_{kj} u_{k,i}^{(n)} + \beta_{ki} u_{k,j}^{(n)} + (n+1) (\delta_{2i} \beta_{kj} u_k^{(n+1)} + \delta_{2j} \beta_{ki} u_k^{(n+1)})] \quad (12)$$

其中:

$$u_i = \sum_{n=0}^{\infty} x_2^n u_i^{(n)}(x_1, x_3, t), e_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} x_2^n e_{ij}^{(n)}. \quad (13)$$

$n$  阶应力应变温度关系为:

$$t_{ij}^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} D_{ijkl} e_{kl}^{(m)}. \quad (14)$$

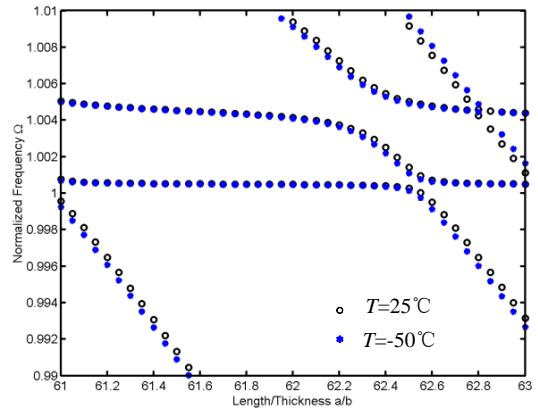


图 4. AT 切石英晶体的频率谱图。  
Fig 4. Frequency spectrum of AT-cut quartz crystal.

其中热弹性常数为:

$$D_{ijkl} = C_{ijkl} + D_{ijkl}^{(1)} \Theta + D_{ijkl}^{(2)} \Theta^2 + D_{ijkl}^{(3)} \Theta^3. \quad (15)$$

Lee 和 Yong 已经给出了 Y 切、AT 切和 SC 切石英晶体的热弹性常数 ( $n=1,2,3$ )  $D_{ijkl}^{(n)}$  的值[5]。我们这

里只计算 AT 切石英晶体的情况，将热膨胀系数用缩略下标表示则有：

$$\beta_{11} = \beta_1, \beta_{22} = \beta_2, \beta_{33} = \beta_3, \beta_{23} = \beta_4, \beta_{12} = \beta_{13} = 0. \quad (16)$$

当  $|T - T_0| \leq 100^\circ\text{C}$  时,  $\beta_4 \ll \beta_i$  ( $i=1,2,3$ ), 因此我们在此略去  $\beta_4$  的影响。当只有厚度剪切模态、弯曲模态和面剪切模态三者耦合时, 考虑温度效应的一阶板近似方程为：

$$\begin{aligned} t_5^{(0)} &= 2b[\kappa_6 D_{56} \beta_2 u_{2,1}^{(0)} + D_{55} \beta_3 u_{3,1}^{(0)} + \kappa_6 D_{56} \beta_1 u_1^{(1)}] \\ t_6^{(0)} &= 2b\kappa_6[\kappa_6 D_{66} \beta_2 u_{2,1}^{(0)} + D_{65} \beta_3 u_{3,1}^{(0)} + \kappa_6 D_{66} \beta_1 u_1^{(1)}] \\ t_1^{(1)} &= \frac{2b^3}{3} D_{11} \beta_1 u_{1,1}^{(1)}; \\ \beta_2 t_{6,1}^{(0)} &= 2b\rho\ddot{u}_2^{(0)}, \\ \beta_3 t_{5,1}^{(0)} &= 2b\rho\ddot{u}_3^{(0)}, \\ \beta_1 t_{1,1}^{(1)} - \beta_1 t_6^{(0)} &= \frac{2b^3}{3} \rho\ddot{u}_1^{(1)}. \end{aligned} \quad (17)$$

采用与不考虑温度效应类似的方法对位移进行直行波假设如(7)的形式, 代入运动方程即可得到频率与波数的关系。再将振幅比假设成(9), 结合应力边界条件(8)可以得到考虑温度效应的频谱关系。

固定温度点, 可以得到频率谱图(见图 4); 固定长厚比, 可以画出温度频率曲线(见图 5)。

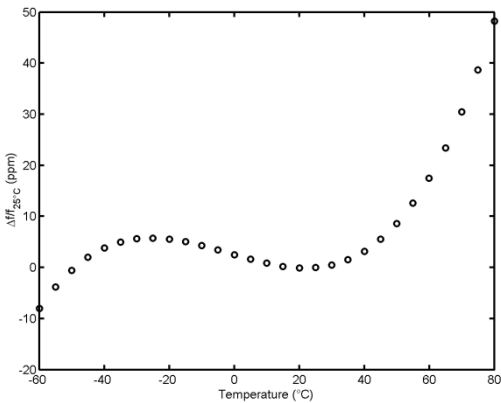


图 5.  $a/b=61.8325$  时 AT 切石英晶体的频温关系曲线。  
Fig.5. Frequency-temperature relation of the fundamental thickness-shear mode of vibrations of AT-cut quartz crystal plate at  $a/b=61.8325$ .

### 3. 程序流程图

利用 MATLAB GUI 设计了一个关于 AT 切石英晶体谐振器设计的图形用户界面, 程序流程图(见图 6)。采用对话框方式先输入相关的已知参数, 计算出石英晶体板的基本尺寸和电极长度, 然后通过点击右边相应的按钮来画出色散关系图、频率谱图和考虑

温度影响的频率谱图和频率温度关系曲线。对石英晶体谐振器的各个参数做出基于计算分析的最佳选择, 图形用户界面(见图 7)。

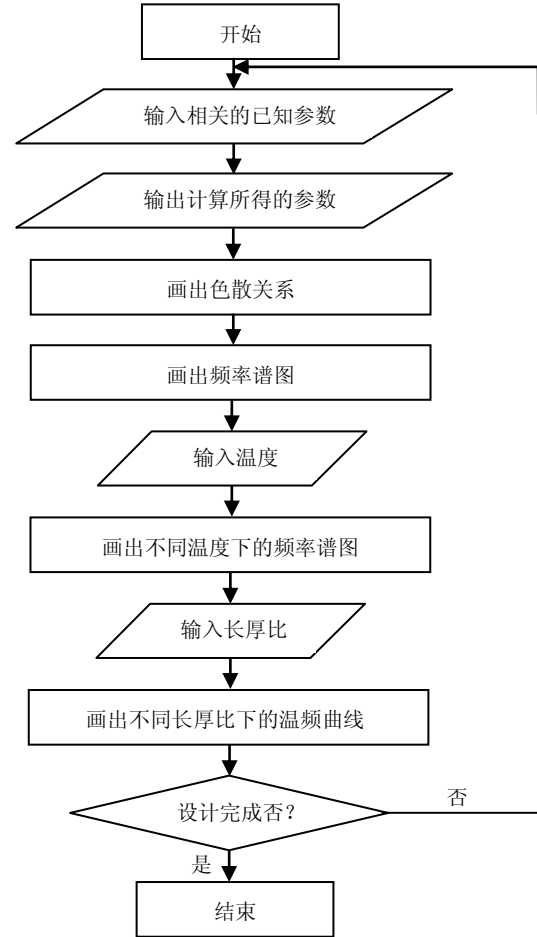


图 6. 石英晶体谐振器设计程序流程图。  
Fig 6. Procedure chart for quartz crystal resonator design

## 4. 算例

### 4.1. 算例一

选择一个谐振频率为 50MHz, 电极材料为 Au, 电极厚度为  $1000 \text{ \AA}$ , 最大长度尺寸为 2mm 的 AT 切石英晶体谐振器。通过计算可得其最佳的石英晶体板厚度为  $0.0316359\text{mm}$ , 最佳的石英晶体板长度为  $1.95613\text{mm}$ , 最佳长厚比为 61.8325, 最佳的电极长度为  $0.36096\text{mm}$  (图 8)。画出相应色散关系、频率谱(图 3)、考虑温度影响的频率谱(图 4)和频温关系曲线(图 5)等。由图 3 可以发现基于计算分析得到的最佳长厚比为 61.8325 正好是一个耦合较弱的尺寸, 且由图 5 可见该尺寸下频温曲线也比较好。

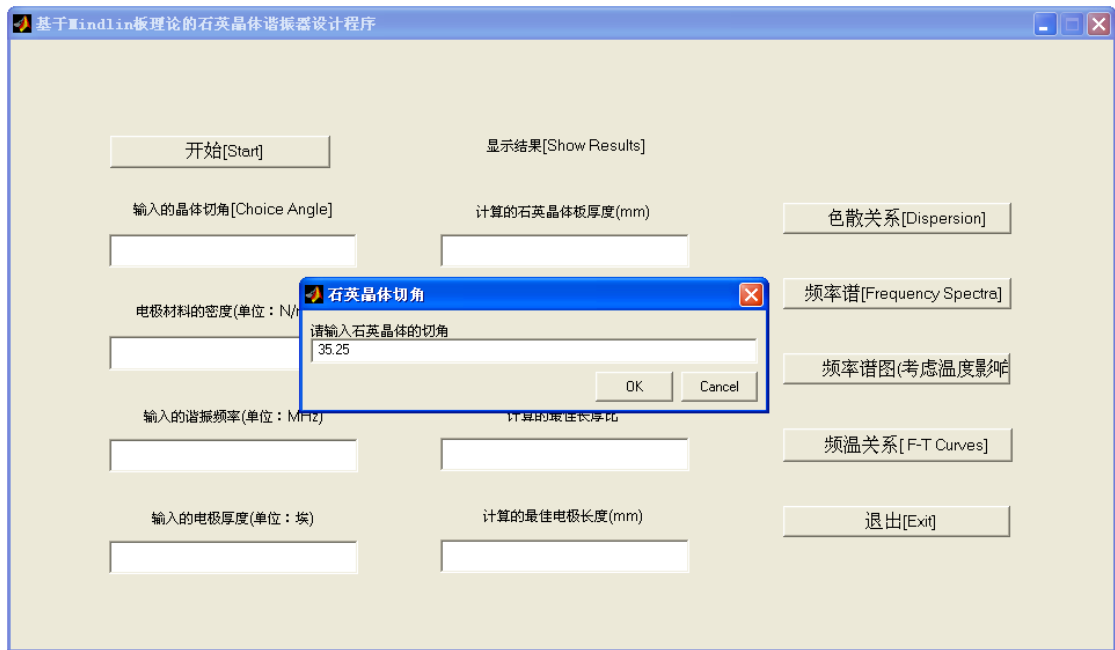


图 7. 石英晶体谐振器设计程序图形用户界面。  
Fig 7. Graphical user interface of quartz crystal resonator design program.



图 8. 石英晶体谐振器设计程序运行后的界面。  
Fig 8. Results from quartz crystal resonator design program.

#### 4.2. 算例二

选择一个谐振频率为 35MHz, 电极材料为 Al, 电极厚度为 1000Å, 最大长度尺寸为 2.5mm 的 AT 切石英晶体谐振器。通过程序计算出其最佳的石英晶体板厚度为 0.0470712mm, 最佳的石英晶体板长度为

2.45694mm, 最佳长厚比为: 52.1963, 最佳的电极长度为 1.75244mm。相应的频率谱图(见图 9), 长厚比为 52.19636 的频温曲线(见图 10)。可以发现该尺寸也处在一个耦合较弱的位置, 且其频温曲线特性也比较好。

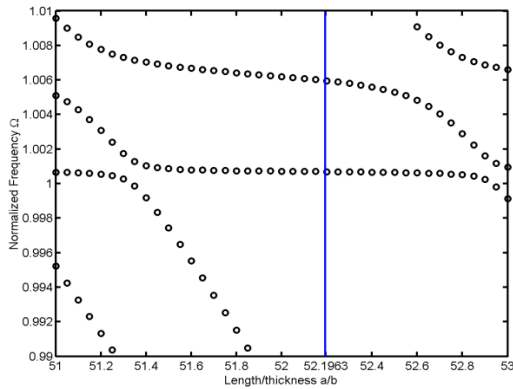


图9. Mindlin 一阶板方程所得 AT 切石英晶体频率谱图  
Fig 9. Frequency spectrum of an AT-cut quartz plate by the Mindlin first-order equations

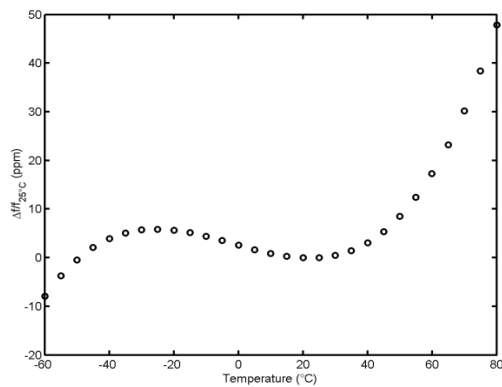


图 10.  $a/b=52.1963$  时 AT 切石英晶体的温度频率曲线。  
Fig 10. Frequency-temperature curves of the fundamental thickness-shear mode of vibrations of AT-cut quartz plate at  $a/b=52.1963$ .

## 5. 小结

本文的程序给出了理论上的最佳石英晶体板长度和厚度、电极长度，以及相应的色散关系、频率谱图、频率温度关系等信息，有利于石英晶体谐振器设计参数的初步估计和最佳选择，减少了设计中的盲目性和试验时间，为基于计算分析的设计流程奠定基础。我们将在以后的研究中考虑更多因素的影响，如压电效应，电极效应等，并把计算电路参数的程序也加进来以进一步丰富和完善石英晶体谐振器设计程序。

## 致谢

本文研究工作得到了国家自然科学基金委员会(项目号 10772087 和 10932004)、宁波市科技局工业科技攻关项目(项目号 2007B10052)和台晶(宁波)电子有限公司的支持。

## 参考文献

1. J. Wang and L.-J. Shen, Exact thickness-shear resonance frequency of electroded piezoelectric crystal plates, *J. Zhejiang University Science*, **6A(9)**, 980-985, 2005.
2. J. Wang and W. Zhao, The Determination of the optimal length of crystal blanks in quartz crystal resonators, *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, **52(11)**, 2023-2030, 2005.
3. R. D. Mindlin, Bechmann's number for harmonic overtones of thickness/twist vibrations of rotated-Y-cut quartz plates, *J. Acoust. Soc. Am.*, **41**, 969-973, 1967.
4. P. C. Y. Lee and J. Wang, Frequency-temperature relations of thickness-shear and flexural vibrations of contoured quartz resonators, *J. Appl. Phys.*, **80(6)**, 3457-3465, 1996.
5. P. C. Y. Lee and Y.-K. Yong, Frequency-temperature behavior of thickness vibrations of doubly rotated quartz plates affected by plate dimensions and orientations, *J. Appl. Phys.*, **60(7)**, 2327-2342, 1986.
6. J. Wang, L. J. Yang, and J. K. Du, The dispersion relations and vibration modes of infinite quartz crystal plates at higher frequencies, *Proceedings of the Joint Conference of the 2009 Symposium on Piezoelectricity, Acoustic Waves, and Device Applications and 2009 China Symposium on Frequency Control Technology*, 494-499, 2009.
7. J. Wang, Q. Q. Pan, L. J. Yang, and M.-C. Chao, Design of quartz crystal resonators with an analytical procedure based on the Mindlin plate theory, *Proceedings of the 2010 IEEE International Ultrasonics Symposium*, October 11-14, San Diego, California, USA.
8. R. D. Mindlin (edited by J. S. Yang), *An Introduction to the Mathematical Theory for the Vibrations of Elastic Plates*, World Scientific, New Jersey, 2007.
9. R. Bechmann, A. D. Ballato, and T. J. Lukaszek, Higher-order temperature coefficients of the elastic stiffnesses and compliances of alpha-quartz, *Proceedings of the IRE*, **50(8)**, 1812-1822, 1962.
10. R. Bechmann, Elastic and piezoelectric of alpha-quartz, *Phys. Rev.*, **110(5)**, 1060, 1958.
11. J. Wang, M.-C. Chao, L. J. Yang, Q. Q. Pan, Y. M. Chen, and J. K. Du, An integrated analysis of vibration of quartz crystal plates with the Mindlin plate theory for resonator design and optimization, *Proceedings of the First Joint China-Japan International Workshop on Acoustic Wave Device*, November 4-5, 2010.